

ASME-24BC-MAT-1

MATHEMATICS (PAPER-1)

गणित (पेपर-1)

Time Allowed : 3 Hours

निर्धारित समय : 3 घंटे

[Maximum Marks: 100

अधिकतम अंक : 100

QUESTION PAPER SPECIFIC INSTRUCTIONS

प्रश्न पत्र संबंधी विशेष अनुदेश

Please read each of the following instructions carefully before attempting questions.

उत्तर देने से पूर्व निम्नलिखित निर्देशों को कृपया सावधानीपूर्वक पढ़ें।

1. There are EIGHT questions printed in both. English and Hindi.
इसमें आठ प्रश्न हैं जो अंग्रेजी और हिन्दी दोनों में छपे हैं।
2. Candidate has to attempt FIVE questions in all either in English or Hindi.
उम्मीदवार को कुल पाँच प्रश्नों के उत्तर अंग्रेजी या हिन्दी में देने हैं।
3. **Question No. 1 is compulsory.** Out of remaining seven questions, FOUR are to be attempted.
प्रश्न संख्या 1 अनिवार्य है। शेष सात प्रश्नों में से चार प्रश्नों के उत्तर दीजिए।
4. All questions carry equal marks. The number of marks carried by a question/ part are indicated against it.
सभी प्रश्नों के समान अंक हैं। प्रत्येक प्रश्न / भाग के नियत अंक उसके सामने दिए गए हैं।
5. Write answers in legible handwriting. Illustrate your answers with suitable sketches and diagrams, wherever considered necessary.
सुपाठ्य लिखावट में उत्तर लिखिए। जहाँ भी आवश्यक समझा जाए, वहाँ अपने उत्तरों को उपयुक्त रेखाचित्रों और आरेखों के साथ स्पष्ट कीजिए।
6. Each part of the question must be answered in sequence and in the same continuation.
प्रश्न के भाग का उत्तर उसी क्रम में दिया जाना चाहिए।
7. Attempts of the questions shall be counted in sequential order. Unless struck off, attempt of a question shall be counted even if attempted partly. Any page or portion of the page left blank in answer book must be clearly struck off.
प्रश्नों के उत्तरों की गणना क्रमानुसार की जाएगी। आंशिक रूप से दिए गए प्रश्नों के उत्तर को भी मान्यता दी जाएगी यदि उसे काटा नहीं गया हो। खाली छोड़ें गए कोई भी पृष्ठ अथवा पृष्ठ के भाग को पूर्णतः काट दीजिए।
8. Re-evaluation/ re-checking of answer book of the candidate is not allowed.
उम्मीदवार की उत्तरपुस्तिका का पुनर्मूल्यांकन / पुनः जाँच की अनुमति नहीं है।

1. (a) Show that the similar matrices have the same minimal polynomial. 05
सिद्ध करो कि समरूप आव्यूह के समान मिनीमल बहुपद होते हैं।
- (b) Find the asymptotes of the curve. 05
 $x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 + 2x^2 + 3xy - 4y^2 + 7x + 2y = 0$
वक्र $x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 + 2x^2 + 3xy - 4y^2 + 7x + 2y = 0$ के अनन्तस्पर्शी ज्ञात करो।
- (c) Compute the general solution of the non-linear differential equation 05
 $y = xy' + (y')^2$, where $y' = \frac{dy}{dx}$
गैर रेखीय अवकल समीकरण $y = xy' + (y')^2$ का व्यापक हल ज्ञात करो जहाँ $y' = \frac{dy}{dx}$
- (d) Show that the vector field defined by the vector function 05
 $\vec{V} = xyz(yzi + xzj + xyk)$ is conservative.
सिद्ध करो कि सदिश फलन $\vec{V} = xyz(yzi + xzj + xyk)$ से परिभाषित सदिश फलन कंजरवेटिव है।
2. (a) Show that the inner product space is a normed vector space but converse is not true. 10
सिद्ध करो कि अंतर गुड़न समिष्ट एक लंबित सदिश समिष्ट है लेकिन व्युत्क्रम सत्य नहीं है।
- (b) If the plane $x+y+z=1$ cuts the cylinder $x^2+y^2=1$ in an ellipse, then determine the 10
point on the ellipse that lie closest to and farthest from the origin.
यदि समतल $x+y+z=1$, दीर्घवृत्त में वेलन $x^2+y^2=1$ को काटता है तब दीर्घवृत्त पर विंदु ज्ञात करो जो कि मूल विंदु से पास से पास और दूर से दूर हो।
3. (a) Find the volume of the solid enclosed between the surfaces $x^2+y^2=a^2$ and $x^2+z^2=a^2$ 10
 a^2 .
पृष्ठों $x^2+y^2=a^2$ तथा $x^2+z^2=a^2$ के बीच में आने वाले ठोस का आयतन ज्ञात कीजिए।
- (b) Find the equation of the plane passing through the line of intersection of the planes 10
 $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ and $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ and perpendicular to the xy -plane.
समतल का समीकरण ज्ञात करो जो कि समतलों $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ तथा $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ के प्रतिच्छेदन की रेखा से गुजरता है तथा xy -तल के लम्बवत

है।

4. (a) Show that every non-zero finite-dimensional inner product space has an orthonormal basis. 10

सिद्ध करो कि प्रत्येक नॉन ज़ीरो परिमित विमीय अंतर गुड़न समिष्ट का ऑर्थोनॉर्मल आधार होता है

- (b) Using the concept of diagonalizability, determine A^5 , where 10

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

डाईगोनालिजाबिलिटी की अवधारणा का प्रयोग करके, A^5 ज्ञात करो, जहाँ

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

5. (a) Solve the differential equation 10

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + 2y = x + x^2 \log x + x^3$$

अवकल समीकरण $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + 2y = x + x^2 \log x + x^3$ को हल कीजिए।

- (b) Determine the power series solution about the origin of the differential equation 10

$$(1 - x^2) \frac{d^2y}{dx^2} - 4x \frac{dy}{dx} + 2y = 0$$

अवकल समीकरण $(1 - x^2) \frac{d^2y}{dx^2} - 4x \frac{dy}{dx} + 2y = 0$ का पावर श्रेणी हल, मूल बिन्दु के सापेक्ष ज्ञात करो।

6. (a) Find the work done by the force $\vec{F} = (x^2 - y^2)i + (x + y)j$ in moving a particle along the closed path C containing the curves $x + y = 0$, $x^2 + y^2 = 16$ and $y = x$ in the first and the fourth quadrants. 10

प्रथम तथा चतुर्थ चतुर्थासों में वक्र $x + y = 0$, $x^2 + y^2 = 16$ तथा $y = x$ से बने बंद पथ C के साथ घूमते हुए कण पर लगे बल $\vec{F} = (x^2 - y^2)i + (x + y)j$ के द्वारा किया गया कार्य ज्ञात कीजिए।

- (b) Evaluate the surface integral $\iint_S F \cdot n dA$ where $\vec{F} = z^2i + xyj - y^2k$ and S is the portion of the surface of the cylinder $x^2 + y^2 = 36$, $0 \leq z \leq 4$ included in the first quadrant. 10

पृष्ठीय समाकल $\iint_S F \cdot n dA$ का मान ज्ञात करो जहाँ $\vec{F} = z^2i + xyj - y^2k$ तथा S वेलन $x^2 + y^2 = 36$, $0 \leq z \leq 4$ जोकि प्रथम चतुर्थास में है, के पृष्ठ का भाग है।

- 7 (a) A particle is projected in a plane with velocity $\sqrt{\mu/3a^6}$ at the distance a from the circle of force attracting according to the law μ/r^7 in the direction inclined at 30° to the radius vector. Show that the orbit is $r^2 = 2a^2 \cos 2\theta$. 10

एक कण $\sqrt{\mu/3a^6}$ की गति से तल पर प्रक्षेपित है, जोकि μ/r^7 के नियम के अनुसार 30° झुके हुए त्रिज्या सदिस की दिशा में सर्किल ऑफ फोर्स से a दूरी पर है। सिद्ध करो कि $r^2 = 2a^2 \cos 2\theta$ एक ऑर्बिट है।

- (b) R is the resultant of forces P and Q acting on a particle at O . If P is reversed, Q remaining the same, the resultant becomes R' . If R and R' are perpendicular to each other, show that $P=Q$. 10

कण के बिंदु O पर कार्यरत बलों P तथा Q का परिणामी बल R है। यदि P को उलट दिया जाए, Q को वैसा ही रखा जाए तब परिणामी बल R' हो जाता है। यदि R तथा R' एक दूसरे के लम्बवत है तब सिद्ध करो कि $P=Q$ ।

- 8 (a) Show that every real n -dimensional vector space is isomorphic to R^n . 10

सिद्ध करो कि प्रत्येक वास्तविक n -विमिय सदिस समिष्ट R^n के तुल्यकारी है।

- (b) The amplitude of a simple harmonic oscillator is doubled. How does this effect the time period, total energy and maximum velocity of the oscillator? 10

एक सरल आवृत्ति दोलक का आयाम दोगुना कर दिया जाता है तब इस दोलक की समयावधि, कुल ऊर्जा तथा अधिकतम वेग पर क्या प्रभाव पड़ता है।
